

Задача 1. (10 баллов)

Для заполнения следующей таблицы используются только числа от 1 до 4. Каждое число должно встречаться по одному разу в каждой строке и каждом столбце.

Кроме того, при заполнении данной таблицы следует учитывать, что таблица разделена на области. В каждой из областей указано число и знак операции (+, -, × или ÷). Данная операция должна быть применена ко всем числам, находящимся в данной области в определенном порядке. Если числа в области подобраны правильно, то после выполнения указанной операции ко всем числам из данной области будет получено число, указанное в области.

Также в некоторых отдельных ячейках могут быть вписаны числа.

	A	B	C	D
1	12+	3+		96×
2			3	
3	6+			
4			2÷	

Например, если в области написано «3÷», то при делении одного из чисел данной области на другое число данной области должно получиться число 3.

Обратите внимание, что буквы и числа на внешней стороне таблицы нужны для удобства решения.

В ответе приведите полностью заполненную таблицу.

Ответ:

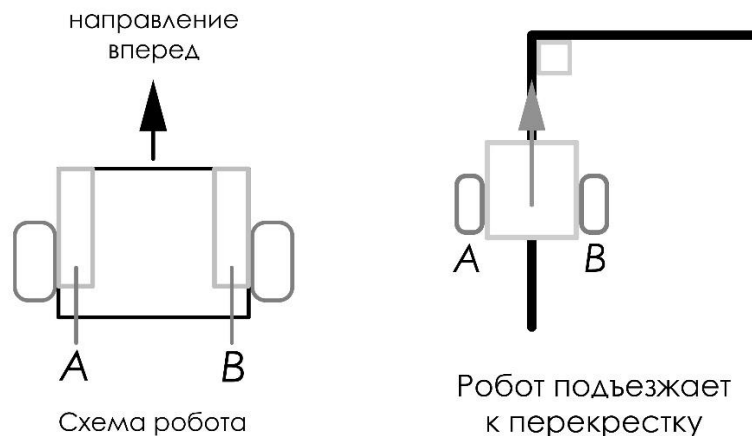
	A	B	C	D
1	3	2	1	4
2	1	4	3	2
3	2	1	4	3
4	4	3	2	1

Задача 2. (10 баллов)

Робот оснащен двумя отдельно управляемыми колесами, диаметр колеса робота 10 см, максимальная скорость вращения моторов 2 об/с. Левым колесом управляет мотор *A*, правым колесом управляет мотор *B*.

Длина робота равна 38 см, ширина робота равна 24 см, высота робота равна 25 см. Длина колесной базы робота равна 30 см. Масса робота равна 4,5 кг.

Траектория движения робота определяется различными режимами работы моторов *A* и *B*. Режим работы мотора задается двумя параметрами: направление вращения оси мотора («+» - вращение вперед, «-» - вращение назад, «0» - отсутствует вращение) и количество градусов, на которое повернется ось мотора.



Робот подъезжает передней частью к перекрестку, после чего он должен повернуть на 90° по часовой стрелке. При расчетах примите $\pi \approx 3,14$.

А) (5 баллов) Определите режимы вращения моторов *A* и *B*, при которых робот будет совершать поворот вокруг центра колесной базы. В ответ для каждого мотора запишите число градусов со знаком. (Например, *A* -360, *B* -120). Объясните свой ответ.

Б) (5 баллов) Определите режимы вращения моторов *A* и *B*, при которых робот будет совершать поворот вокруг колеса *A*. В ответ для каждого мотора запишите число градусов со знаком. Объясните свой ответ.

Решение:

А) Для осуществления поворота вокруг центра колесной базы робота необходимо, чтобы оси моторов вращались в разные направления, но на одинаковое по модулю количество градусов. Так как робот должен осуществить поворот на право, следовательно, режим работы мотора А «+», а мотора В «-».

Рассчитаем необходимое количество градусов, на которое должны повернуться оси моторов.

- 1) Определим длину дуги, которое опишет колесо робота при осуществлении поворота на 90 градусов вокруг центра колесной базы. Так как поворот осуществляется вокруг центра колесной базы, то именно он является центром искомой окружности искомой дуги. Из условий известно, что длина колесной базы равна 30 см, значит диаметр окружности равен 30 см.

$$L = \frac{2\pi r n}{360} = \frac{\pi d n}{360} \text{ (формула нахождения длины дуги окружности)}$$

$$L \text{ дуги} = \frac{3.14 \times 30 \times 90^\circ}{360} = 23,55 \text{ см}$$

- 2) Определим расстояние, которое проходит робот при полном повороте колеса на 360 градусов.

$$L \text{ колеса} = 3.14 \times 10 \text{ см} = 31.4 \text{ см}$$

- 3) Рассчитаем какому количеству градусов соответствует прохождение роботом искомой дуги при повороте

$$\text{Количество градусов} = \frac{L \text{ дуги} \times 360^\circ}{L \text{ колеса}} = \frac{23.55 \times 360^\circ}{31.4} = 270^\circ$$

Таким образом получили, что режимы работы: мотор А «270°», мотор В «-270°».

Б) Для осуществления поворота вокруг колеса А робота необходимо, чтобы колесо А находилось в неподвижном состоянии, следовательно режим работы колеса А «0». Так как мы осуществляем поворот направо, то режим работы колеса В «-».

Рассчитаем необходимое количество градусов, на которое необходимо повернуться оси мотора В.

- 1) Определим длину дуги, которое опишет колесо В робота при осуществлении поворота на 90 градусов вокруг колеса А. Так как поворот осуществляется вокруг колеса А, то именно оно является центром описываемой окружности, следовательно радиус искомой

окружности равен длине колесной базы, т.е. 30 см.

$$L \text{ дуги} = \frac{2 \times 3.14 \times 30 \times 90}{360} = 47.1 \text{ см}$$

- 2) Рассчитаем какому количеству градусов соответствует прохождение роботом искомой дуги при повороте вокруг колеса А

$$\text{Количество градусов} = \frac{L \text{ дуги} \times 360^\circ}{L \text{ колеса}} = \frac{47.1 \times 360^\circ}{31.4} = 540^\circ$$

Таким образом получили, что режим работы мотора А «0», мотора В «-540»

Ответ:

А) А 270°, В -270°

Б) А 0°, В - 540°

Задача 3. (10 баллов)

Даша решила сделать простейший «мобиль». Она взяла легкую прочную твердую ровную балку и нанесла на него разметку с помощью маркера, разделив балку на пять равных частей. Даша прикрепила три шарика к балке (см. *схему мобиля*). А балку она подвесила к потолку комнаты, после чего балка приняла горизонтальное положение.

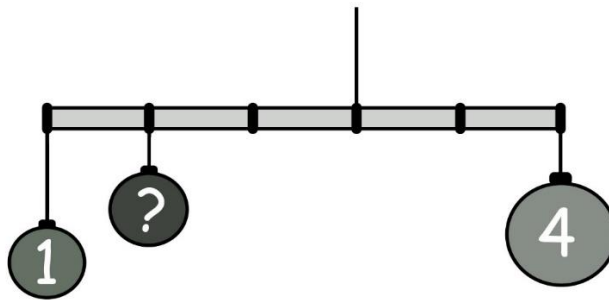


Схема мобиля

Длина балки равна 1 м. Считайте, что балка невесома и нерастяжима.

Масса шарика, расположенного на расстоянии двух частей справа от точки подвеса равна 400 граммов, масса шарика, расположенного на противоположном конце балки равна 100 граммов. Определите, чему равна масса третьего шарика. Ответ дайте в граммах.

Приведите подробное решение данной задачи.

Справка

Мобиль – это вид кинетической скульптуры, основанный на принципах равновесия. Он состоит из нескольких стержней, на котором висят объекты или другие стержни. Объекты, висящие на стержнях, уравнивают друг друга. Каждый стержень висит только на одной струне.

Решение:

Чтобы определить массу третьего шарика, необходимо воспользоваться «Золотым правилом механики»:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{l_2}{l_1}, \text{ где } F = mg$$

Обозначим за X вес третьего шарика. Составим уравнение равновесия для нашей системы. Так как по условию задачи балка разбита на равные части, то мы можем пренебречь ее длиной, учитывая только соотношения частей.

Момент силы левого плеча равен

$$F_1 \times l_1 = 2 \times 400 \times g$$

Момент силы правого плеча равен сумме моментов сил:

$$F_2 \times l_2 = 3 \times 100 \times g + 2 \times X \times g$$

Таким образом получаем:

$$(300 + 2X)g = 800g$$

$$2X = 800 - 300$$

$$2X = 500$$

$$X = 250 \text{ г}$$

Ответ: Масса третьего шарика составляет 250 граммов.

Задача 4. (20 баллов)

Робот-чертежник движется по ровной горизонтальной поверхности и наносит на нее изображение (см. *схему поля*) при помощи кисти, закрепленной в центре колесной базы. Робот оснащен двумя отдельно управляемыми колесами, расстояние между центрами колес составляет 50 см, радиус колеса робота 10 см, максимальная скорость вращения моторов равна 1 оборот за 2 секунды.

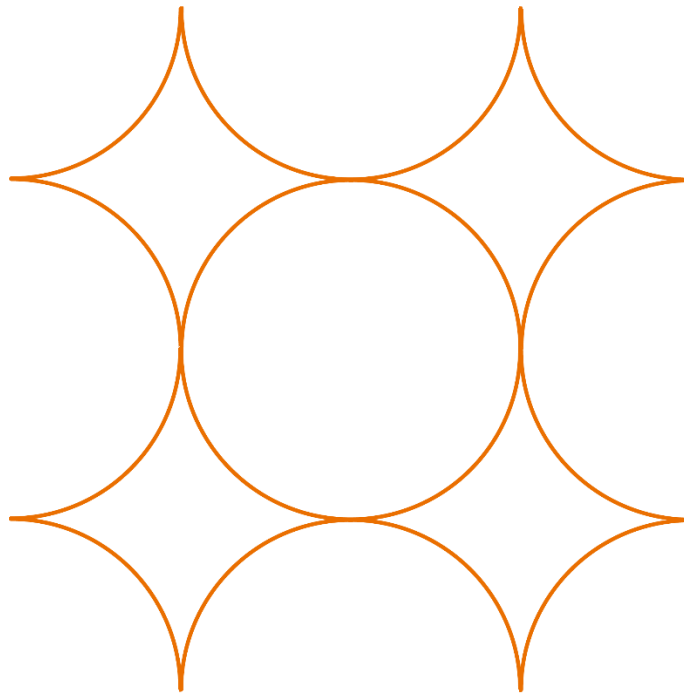


Схема поля

Данное изображение (траектория) составлено только из одинаковых четвертей окружностей, радиус каждой из которых равен 3 м.

Из-за крепления кисти робот не может двигаться назад. Все развороты робот должен совершать на месте вокруг центра колесной базы.

При расчетах примите $\pi \approx 3,14$. Приведите подробное решение данной задачи.

А) (10 баллов) Определите, чему равна длина траектории. Ответ дайте в метрах.

Б) (10 баллов) Определите, за какое минимальное время робот начертит данную фигуру. Ответ дайте в секундах.

Решение:

Определим длину траектории, состоящей из одинаковых частей окружности. Изображение содержит 16 частей окружностей, радиус каждой из которых равен 3 м.

Формула нахождения длины окружности

$$l = 2\pi r$$

Тогда длина траектории будет равна

$$4 \times 2 \times 3,14 \times 3 \text{ м} = 75,36 \text{ м}$$

Для определения минимального времени, за которое робот начертит данную фигуру, необходимо найти время прохождения роботом траектории и время, потраченное роботом на повороты:

$$t = t_{\text{траектории}} + t_{\text{повороты}}$$

Определим расстояние, которое проходит робот при полном повороте колеса на 360 градусов.

$$L \text{ колеса} = 2 \times 3,14 \times 10 \text{ см} = 62,8 \text{ см}$$

Определим скорость движения робота в м/с.

$$V = \frac{1 \text{ оборот}}{2 \text{ с}} = \frac{62,8 \text{ см}}{2 \text{ с}} = 31,4 \frac{\text{см}}{\text{с}} = 0,314 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Найдем время, потраченное роботом на повороты. Так как время должно быть минимальным, то необходимо правильно выбрать точку старта и сократить количество возможных поворотов. Так как данная фигура содержит восемь вершин, то правильнее для старта выбрать одну из них. Следовательно, роботу придется поворачивать только в оставшихся семи вершинах, а так как фигура состоит из одинаковых четвертей окружностей, все семь углов равны. Так как робот не может двигаться назад, то роботу необходимо развернуться на 180 градусов.

Зная длину колесной базы 50 см, можем найти длину дуги, которую описывает колесо при повороте робота вокруг центра.

$$L = \frac{2\pi r n}{360^\circ} = \frac{\pi d n}{360^\circ}$$

$$L = \frac{3,14 \times 50 \text{ см} \times 180^\circ}{360} = 78,5 \text{ см} = 0,785 \text{ м}$$

$$t_{\text{поворота}} = 7 \times \left(0.785 \frac{\text{М}}{0.314 \frac{\text{М}}{\text{с}}}\right) = 17,5 \text{ с}$$

Найдем время прохождения траектории без учета поворотов, но необходимо учитывать, что колесная база робота составляет 50 см, и следовательно, за время прохождения трассы внешнее колесо проедет больше

$$t_{\text{траектории}} = 4 \times 2 \times 3,14 \times \frac{(3 + 0.25)\text{М}}{0.314 \frac{\text{М}}{\text{с}}} = 260 \text{ с}$$

Найдем общее время:

$$t = 260 + 17,5 = 277,5 \text{ с}$$

Ответ:

А) 75,36 м

Б) 277,5 с